AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość Elementów Maszyn

Wykład Nr 8

Rury i cylindry grubościenne

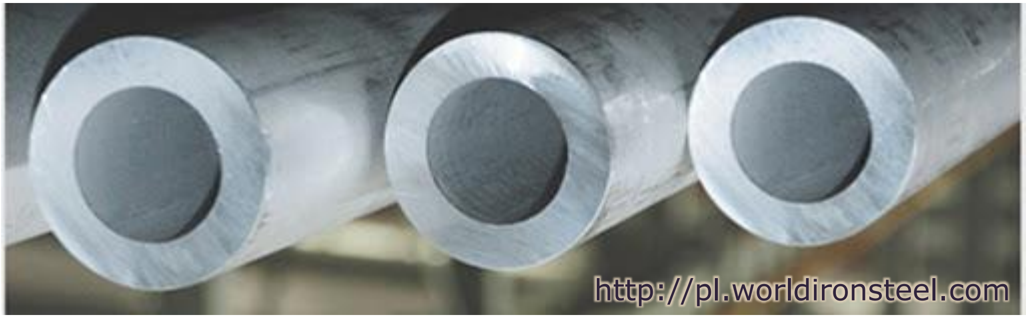
studium przypadków; stan naprężenia i odkształcenia w rurze grubościennej; równania Lamégo; rury grubościenne poddane działaniu ciśnienia wewnętrznego; wytężenie rur przelotowych, wytężenie rur zamkniętych, połączenia wciskowe, naprężenia w krążkach wirujących.

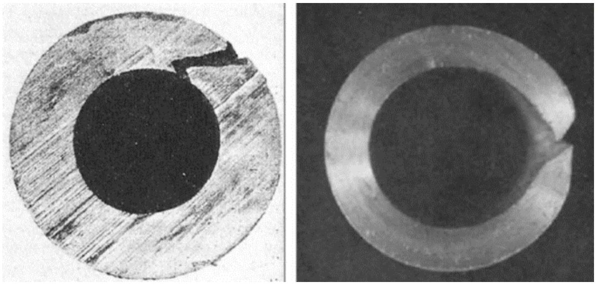
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Projektowania i Eksploatacji Maszyn

dr hab. inż. Tomasz Machniewicz, prof. AGH

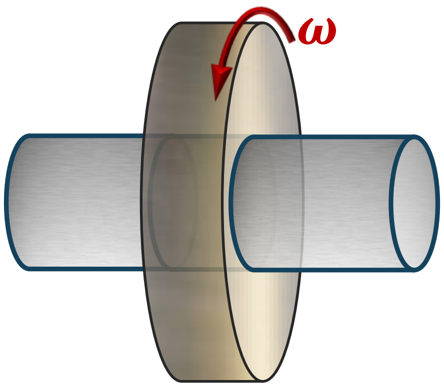
machniew@agh.edu.pl

8.1. Rury i cylindry grubościenne – studium przypadków





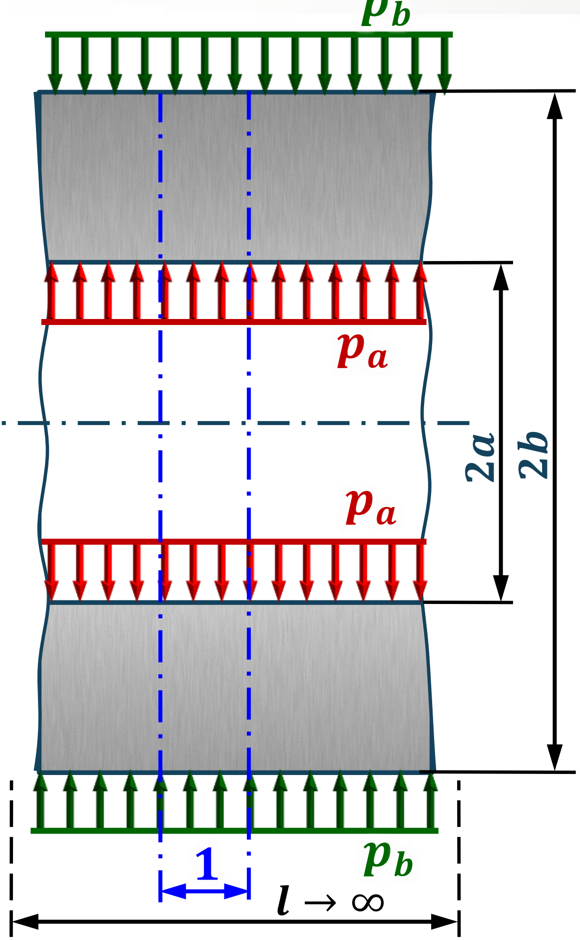
Huang H., Xue L. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2008.11.027



połączenia skurczowe/ wciskowe,

krążki wirujące,

8.2. Naprężenia w rurach grubościennych – równania Lamégo

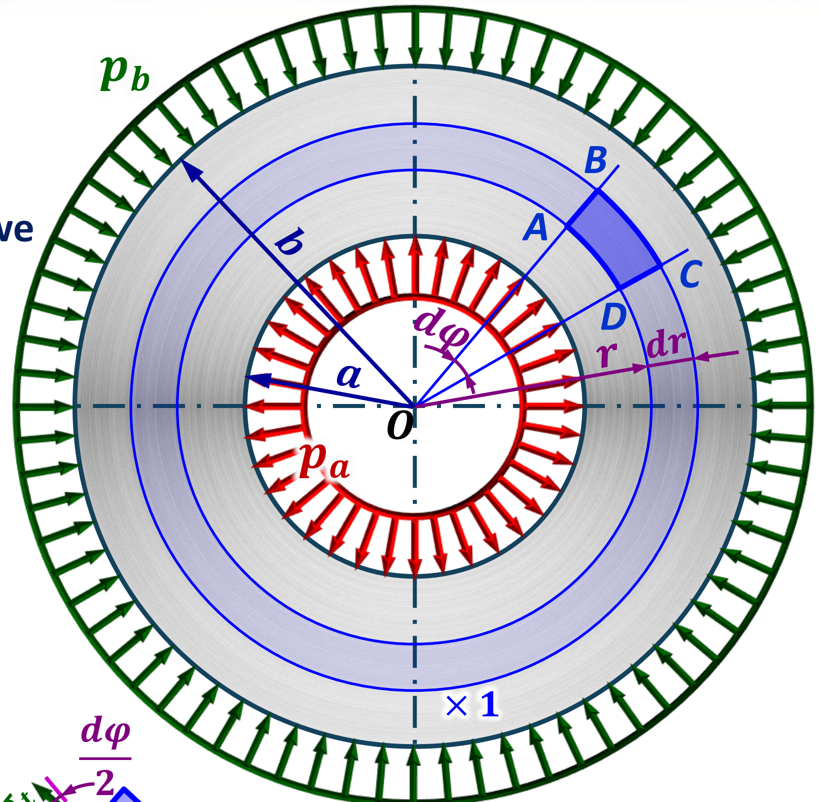


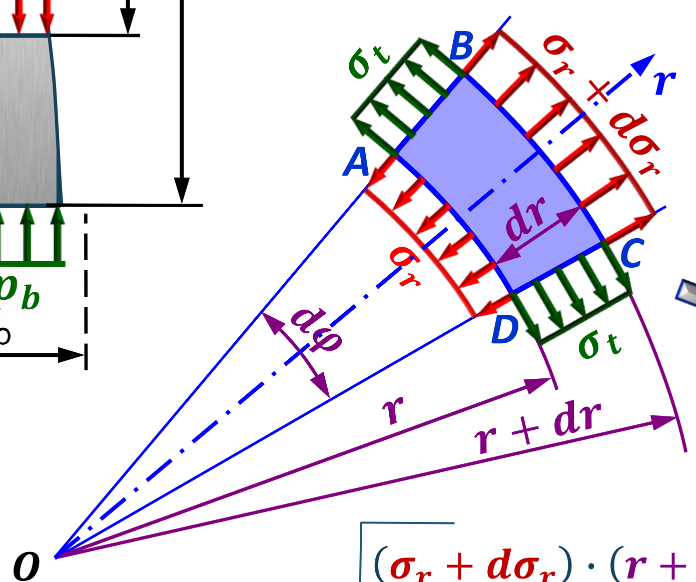
p_b – ciśnienie zewnętrzne

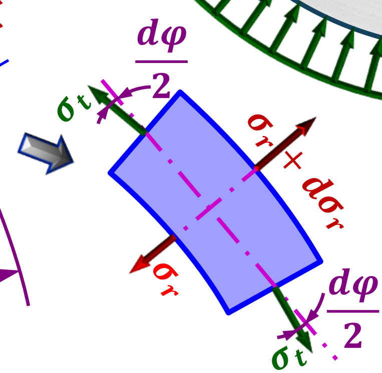
p_a – ciśnienie wewnętrzne

σ_r – naprężenia promieniowe

σ_t – naprężenia obwodowe



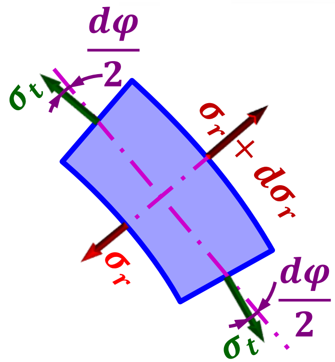


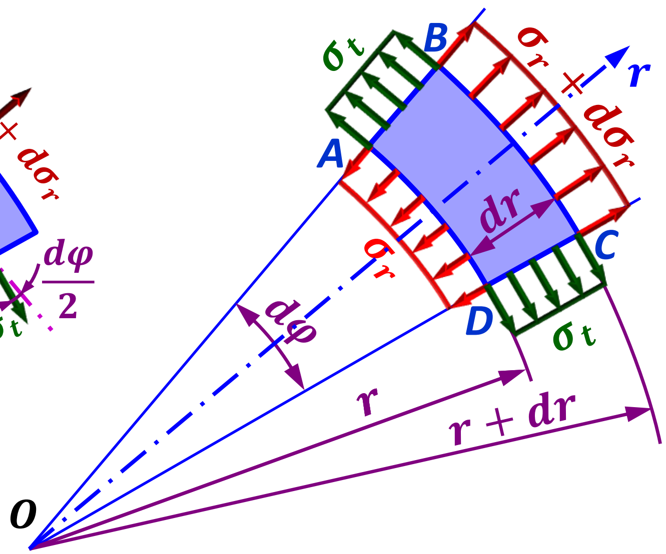


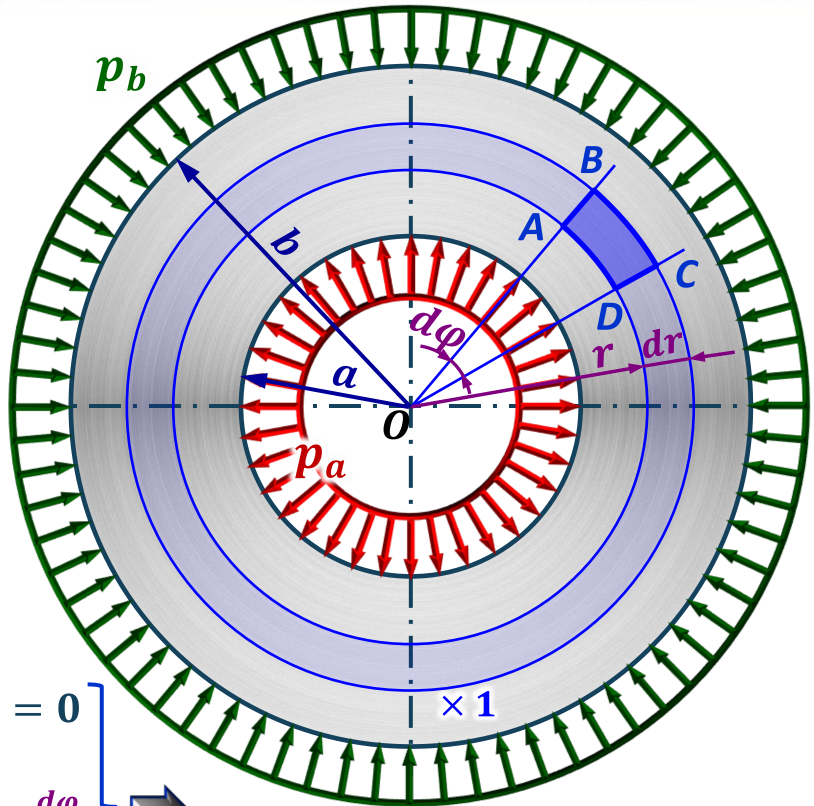
$$\boxed{\sum P_{ir} = 0}$$

$$\boxed{(\sigma_r + d\sigma_r)\cdot(r + dr)d\varphi - \sigma_r \cdot r d\varphi - 2\sigma_t \cdot dr \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0}$$

8.2. Naprężenia w rurach grubościennych – równania Lamégo







$$\sum P_{ir} = 0$$

$$(\sigma_r + d\sigma_r)\cdot(r + dr)d\varphi - \sigma_r \cdot r d\varphi - 2\sigma_t \cdot dr \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0$$

dla $d\varphi \to 0$: $\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx \frac{d\varphi}{2}$

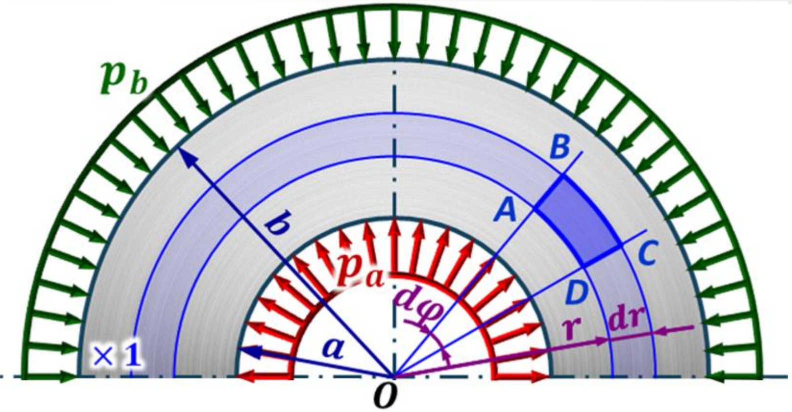
$$(\sigma_r + d\sigma_r)\cdot(r + dr)\cancel{d\varphi} - \sigma_r \cdot r\cancel{d\varphi} - \cancel{2}\sigma_t \cdot dr \cdot \frac{\cancel{d\varphi}}{\cancel{2}} = 0$$

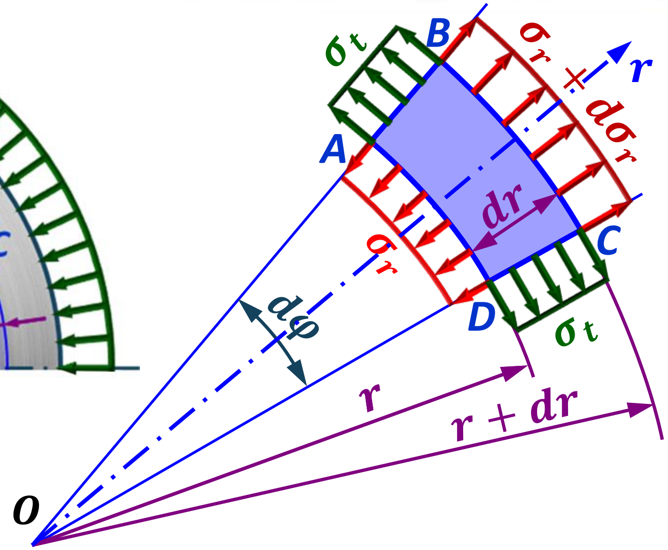
$$\cancel{\sigma_r}r + r d\sigma_r + \sigma_r dr + \overset{\approx 0}{\boxed{d\sigma_r dr}} - \cancel{\sigma_r}r - \sigma_t dr = 0 \Big/ : dr$$

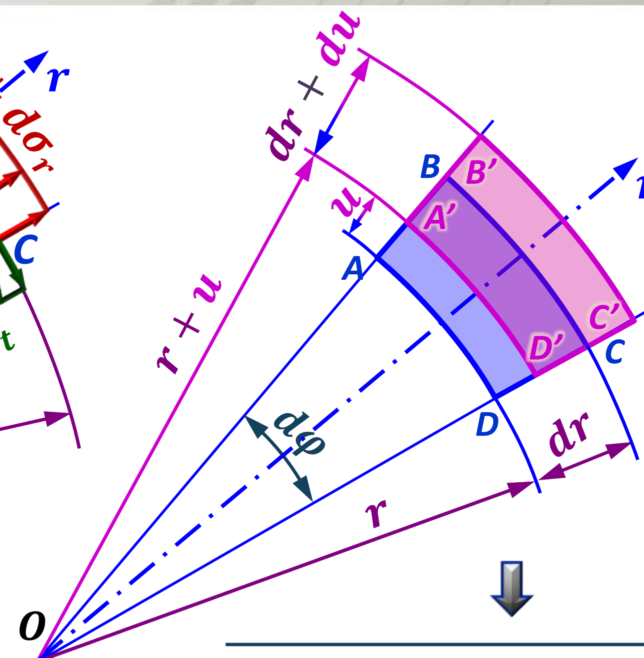
$$\boxed{\sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_t = 0}$$

→ równanie zawiera dwie niewiadome (σ_r i σ_t) → problem statycznie niewyznaczalny.

8.2. Naprężenia w rurach grubościennych – równania Lamégo







1) Równanie równowagi naprężeń:

$$\boxed{\sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_t = 0}$$

2) Równania równowagi odkształceń:

$$\begin{cases}\varepsilon_r = \dfrac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t)\\[2mm] \varepsilon_t = \dfrac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r)\end{cases}$$

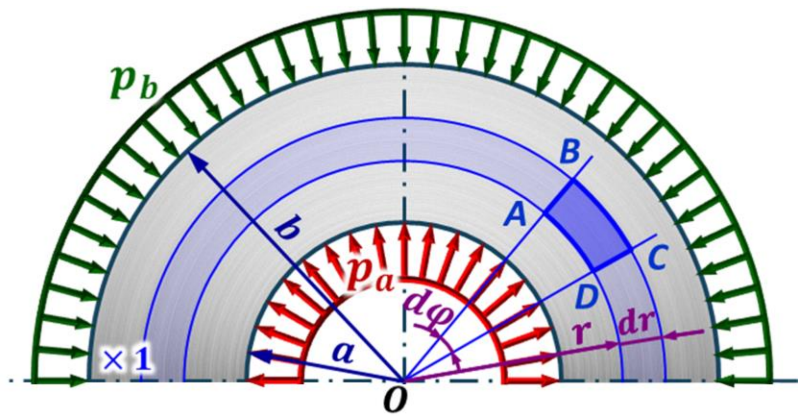
$$\begin{cases}\varepsilon_r = \dfrac{(dr + du) - dr}{dr} = \dfrac{du}{dr}\\[2mm] \varepsilon_t = \dfrac{(r + u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \dfrac{u}{r}\end{cases}$$

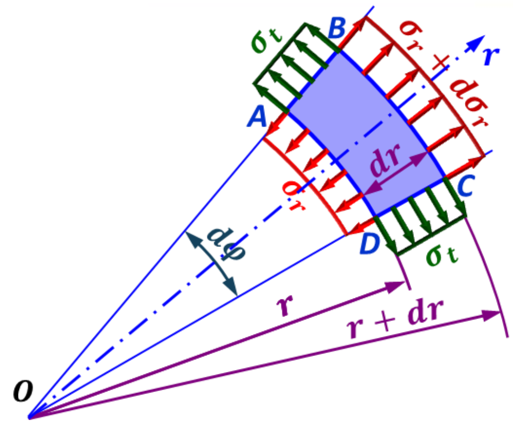
$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t)\\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\sigma_r = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{du}{dr} + \nu\dfrac{u}{r}\right)\\[2mm] \sigma_t = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{u}{r} + \nu\dfrac{du}{dr}\right)\end{cases}$$

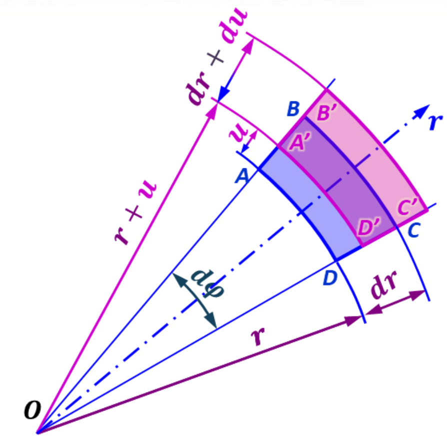
$\rightarrow$ ...

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \nu\frac{r\dfrac{du}{dr} - 1\cdot u}{r^2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{du}{dr} - \nu\frac{u}{r^2}\right)}$$

8.2. Naprężenia w rurach grubościennych – równania Lamégo







$$\boxed{\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)} \qquad \boxed{\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{du}{dr} - \nu\frac{u}{r^2}\right)} \qquad \boxed{\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right)}$$

$$\boxed{\sigma_r} + r\boxed{\frac{d\sigma_r}{dr}} - \boxed{\sigma_t} = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{E}{1-\nu^2}}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) + r\left(\cancel{\frac{E}{1-\nu^2}}\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{du}{dr} - \nu\frac{u}{r^2}\right)\right) - \cancel{\frac{E}{1-\nu^2}}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) = 0$$

$$\frac{du}{dr} + \cancel{\nu\frac{u}{r}} + r\frac{d^2u}{dr^2} + \cancel{\nu\frac{du}{dr}} - \cancel{\nu\frac{u}{r}} - \frac{u}{r} - \cancel{\nu\frac{du}{dr}} = 0 \;/ :r \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0}$$

warunek równowagi wewnętrznej, w postaci równania różniczkowego funkcji przemieszczeń: $u = u(r)$.

Całka ogólna równania różniczkowego tego typu ma postać: $\boxed{u = Cr + \frac{D}{r}}$

8.2. Naprężenia w rurach grubościennych – równania Lamégo

$$\boxed{\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=0}$$

Całka ogólna: $\boxed{u=Cr+\dfrac{D}{r}}$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}\right)\\ \sigma_t&=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r}+\nu\frac{du}{dr}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{E}{1-\nu^2}\left(C-\frac{D}{r^2}+\nu C+\nu\frac{D}{r^2}\right)\\ \sigma_t&=\frac{E}{1-\nu^2}\left(C+\frac{D}{r^2}+\nu C-\nu\frac{D}{r^2}\right)\end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left((1+\nu)C-(1-\nu)\frac{D}{r^2}\right)}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\sigma_t=\frac{E}{1-\nu^2}\left((1+\nu)C+(1-\nu)\frac{D}{r^2}\right)}$$

Warunki brzegowe:

1° $\sigma_r(r=a)=p_a \Rightarrow \sigma_r=\dfrac{E}{1-\nu^2}\left((1+\nu)C-(1-\nu)\dfrac{D}{a^2}\right)=p_a$

2° $\sigma_r(r=b)=p_b \Rightarrow \sigma_r=\dfrac{E}{1-\nu^2}\left((1+\nu)C-(1-\nu)\dfrac{D}{b^2}\right)=p_b$

$$\Rightarrow\ \boxed{C=\frac{1-\nu}{E}\cdot\frac{a^2p_a-b^2p_b}{b^2-a^2}}$$

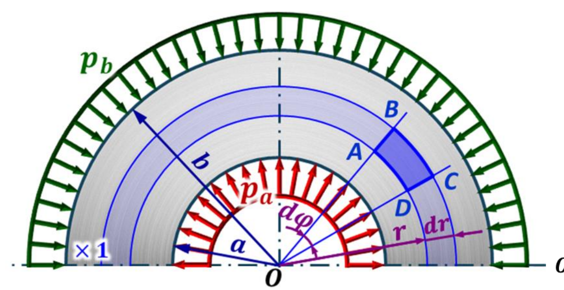
$$\Rightarrow\ \boxed{D=\frac{1+\nu}{E}\cdot\frac{a^2b^2(p_a-p_b)}{b^2-a^2}}$$

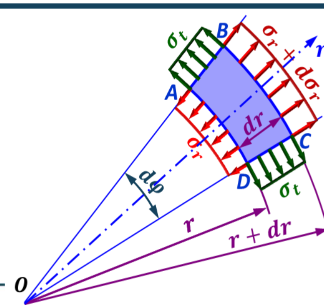
Równania Lamégo:

$$\sigma_r=\frac{a^2p_a-b^2p_b}{b^2-a^2}-\frac{a^2b^2(p_a-p_b)}{(b^2-a^2)r^2}$$

$$\sigma_t=\frac{a^2p_a-b^2p_b}{b^2-a^2}+\frac{a^2b^2(p_a-p_b)}{(b^2-a^2)r^2}$$

$$u=\frac{1}{E(b^2-a^2)}\left((1-\nu)(a^2p_a-b^2p_b)r+(1+\nu)a^2b^2(p_a-p_b)\frac{1}{r}\right)$$





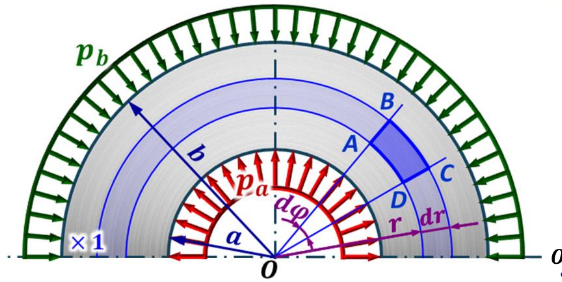
Gabriel Lamé
(1795–1870) francuski matematyk i inżynier

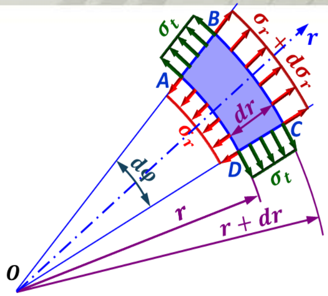
8.2. Naprężenia w rurach grubościennych – równania Lamégo

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{(b^2 - a^2) r^2}$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{(b^2 - a^2) r^2}$$

$$u = \frac{1}{E(b^2 - a^2)}\left((1-v)(a^2 p_a - b^2 p_b) r + (1+v) a^2 b^2 (p_a - p_b)\frac{1}{r}\right)$$





Gabriel Lamé
(1795–1870) francuski
matematyk i inżynier

Dyskusja równań Lamégo:

1) Wartości naprężeń promieniowych (σ_r) i obwodowych (σ_t) nie zależą od właściwości materiału (rodzaju materiału) a jedynie od ciśnienia wewnętrznego (p_a) zewnętrznego (p_b), wymiarów poprzecznych rury (a i b) i współrzędnej promieniowej (r).

2) Dodając stronami zależności na σ_r i σ_t otrzymujemy:

$$\sigma_r + \sigma_t = 2\frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} = const.$$

Wynika stąd, że **w każdym punkcie rury suma naprężeń promieniowych (σ_r) i obwodowych (σ_t) jest stała.**

3) Odkształcenia na kierunku osi rury (założenie: $\sigma_z = 0$ – długa rura bez den) opisać można zależnością:

$$\varepsilon_z = -\frac{v}{E}(\sigma_t + \sigma_r) = const.$$

Wynika stąd, że:

- w każdym punkcie przekroju poprzecznego rury wartość odkształcenia osiowego jest taka sama,
- spełniona jest zasada płaskich przekrojów poprzecznych rury; rurę można rozpatrywać jako szereg złożonych osiowo pierścieni.

8.3. Rura grubościenna obciążona ciśnieniem wewnętrznym

8.3.1. Stan naprężenia

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{(b^2 - a^2) r^2}$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{(b^2 - a^2) r^2}$$

$p_a = p$

$p_b = 0$

$$\sigma_r = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) < 0; \quad r \in \langle a, b \rangle$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) > 0; \quad r \in \langle a, b \rangle$$

Obydwie składowe naprężenia (σ_r i σ_t) osiągają ekstremalne wartości na wewnętrznej powierzchni rury:

dla $r = a$:

$$\sigma_r = -p$$

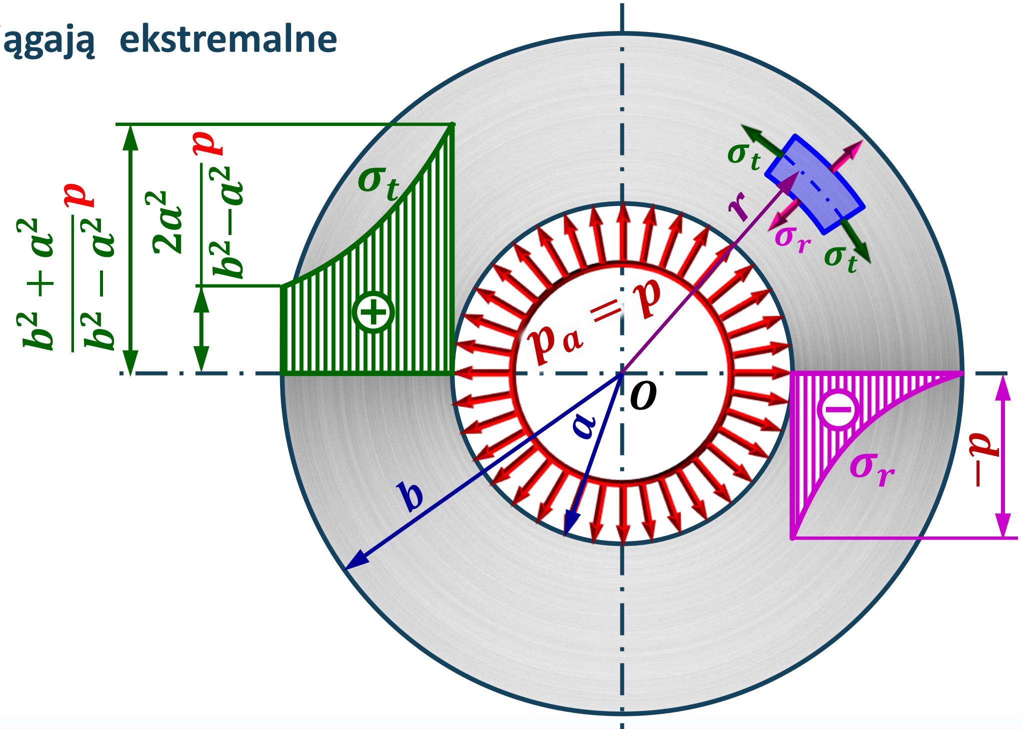
$$\sigma_t = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} p$$

Na powierzchni zewnętrznej rury:

dla $r = b$:

$$\sigma_r = 0$$

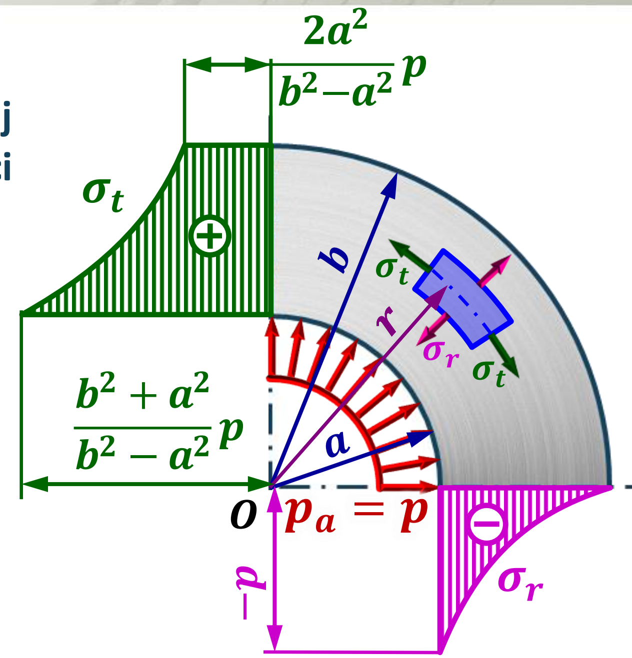
$$\sigma_t = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} p$$



AGH

8.3. Rura grubościenna obciążona ciśnieniem wewnętrznym

8.3.2. Wytężenie rury przelotowej (bez dna):



Największe wytężenie materiału występuje w warstwie wewnętrznej rury ($r = a$), gdzie obydwa naprężenie główne przyjmują wartości ekstremalne. Warunek bezpieczeństwa dotyczy więc tego obszaru.

a) Zastosowanie hipotezy Hubera:

$$\sigma_{zr}^{HMH} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}$$

dla $r = a$: $\sigma_1 = \sigma_t = \dfrac{b^2+a^2}{b^2-a^2}p;\quad \sigma_2 = 0;\quad \sigma_3 = \sigma_r = -p$

$$\sigma_{zr}^{HMH} = \frac{a^2 p}{b^2-a^2}\sqrt{1+3\left(\frac{b}{a}\right)^4} \le k_r$$

Stąd dla zadanego promienia wewnętrznego (a) i ciśnienia wewnątrz rury (p), wyznaczyć można promień zewnętrzny (b) :

$$b \ge a\sqrt{\frac{1+\dfrac{p}{k_r}\sqrt{4+3\dfrac{p^2}{k_r^2}}}{1-3\dfrac{p^2}{k_r^2}}}$$

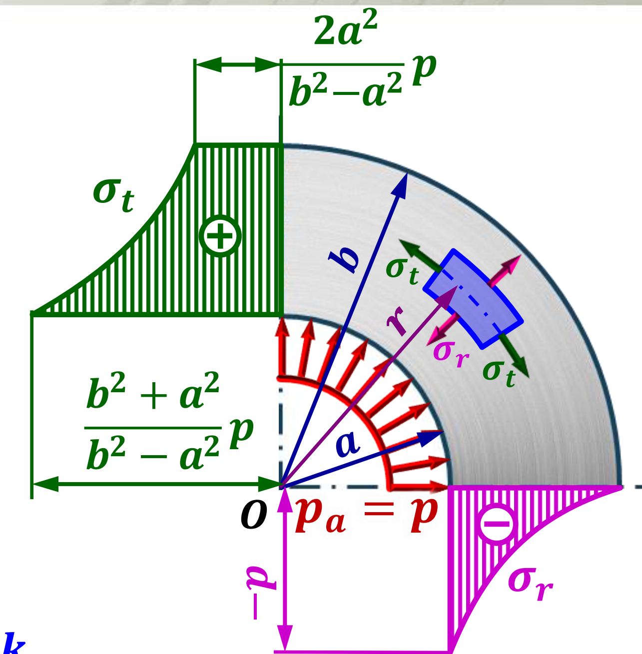
☞ wzór jest słuszny pod warunkiem: $p < \dfrac{k_r}{\sqrt{3}} \approx 0.58k_r$

Jeżeli $p \to k_r/\sqrt{3}$ średnica zewnętrzna rury $D = 2b \to \infty$.

Oznacza to, że przy ciśnieniu wewnętrznym $p \ge k_r/\sqrt{3}$ w monolitycznej rurze grubościennej nie da się zapewnić spełnienia warunku bezpieczeństwa, według hip. H-M-H, bez względu na to jak duża byłaby jej średnica zewnętrzna.

8.3. Rura grubościenna obciążona ciśnieniem wewnętrznym

8.3.2. Wytężenie rury przelotowej (bez dna):



b) Zastosowanie hipotezy τ_{max}:

$$\sigma_{zr}^{CTG} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq k_r$$

dla $r = a$: $\quad \sigma_1 = \sigma_t = \dfrac{b^2+a^2}{b^2-a^2}p; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \sigma_r = -p$

$$\sigma_{zr}^{CTG} = \frac{2b^2}{b^2-a^2}p \leq k_r$$

Stąd dla zadanego promienia wewnętrznego (a) i ciśnienia wewnątrz rury (p), wyznaczyć można promień zewnętrzny (b):

$$b \geq a\sqrt{\frac{k_r}{k_r - 2p}}$$

wzór jest słuszny pod warunkiem: $p < 0.5 \cdot k_r$

Jeżeli $p \to k_r/2$ średnica zewnętrzna rury $D = 2b \to \infty$.

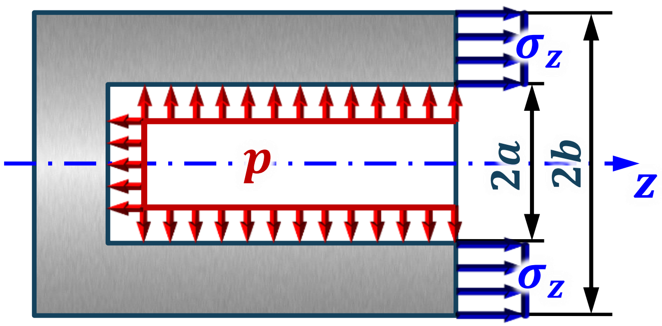
Oznacza to, że przy ciśnieniu wewnętrznym $p \geq 0.5 \cdot k_r$ w monolitycznej rurze grubościennej nie da się zapewnić spełnienia warunku bezpieczeństwa, według hipotezy τ_{max} (C-T-G), bez względu na to jak duża byłaby jej średnica zewnętrzna.

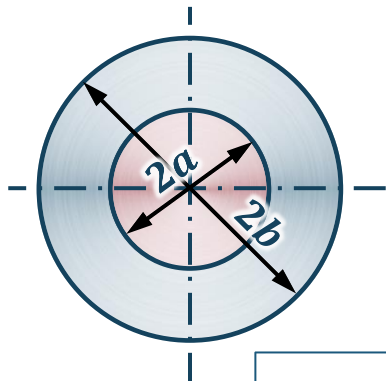
W rurze o nieskończenie dużej grubości ścianki, dla punktów o promieniu $r \geq 4a$ naprężenia σ_t i σ_r nie przekraczają 6% swoich ekstremalnych wartości. Z praktycznego punktu widzenia dla elementów o wymiarach $b \geq 4a$ można więc stosować warunek bezpieczeństwa w postaci:

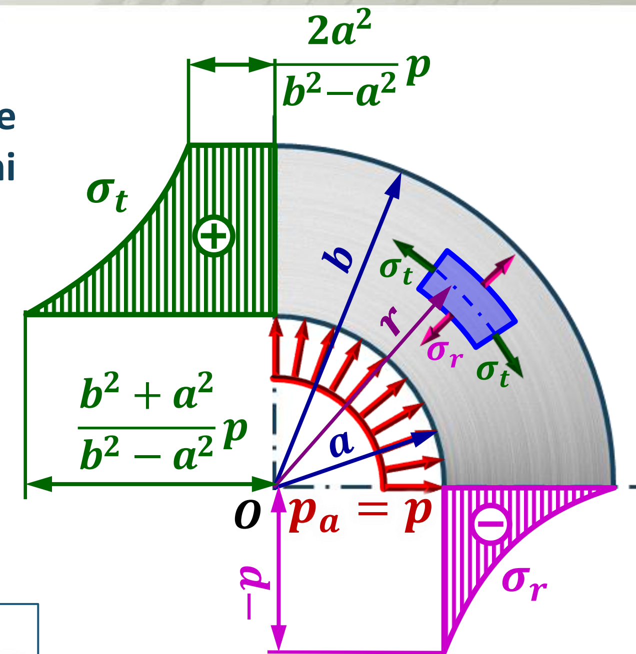
$p \leq k_r/\sqrt{3}$ - według hip. H-M-H, lub $p \leq 0.5 \cdot k_r$ - według hip. C-T-G

8.3.3. Wytężenie rury zamkniętej:

W przypadku rury grubościennej zamkniętej dnami, ciśnienie wewnętrzne, poza naprężeniami obwodowymi (σ_t) i promieniowymi (σ_r), wywołuje także powstanie naprężeń osiowych (σ_z):







$$\sum F_{iz} = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_z \cdot \left(\cancel{\pi} b^2 - \cancel{\pi} a^2\right) - p \cdot \cancel{\pi} a^2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\sigma_z = \frac{a^2}{b^2 - a^2} p}$$

a) Hipoteza Hubera:

$$\sigma_{zr}^{HMH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

dla $r = a$: $\sigma_1 = \sigma_t = \dfrac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} p$; $\sigma_2 = \sigma_z = \dfrac{a^2}{b^2 - a^2} p$; $\sigma_3 = \sigma_r = -p$

$$\boxed{\sigma_{zr}^{HMH} = \frac{\sqrt{3} \cdot b^2 \cdot p}{b^2 - a^2} \le k_r}$$

$$\boxed{b \ge a \sqrt{\frac{k_r}{k_r - p\sqrt{3}}}}$$

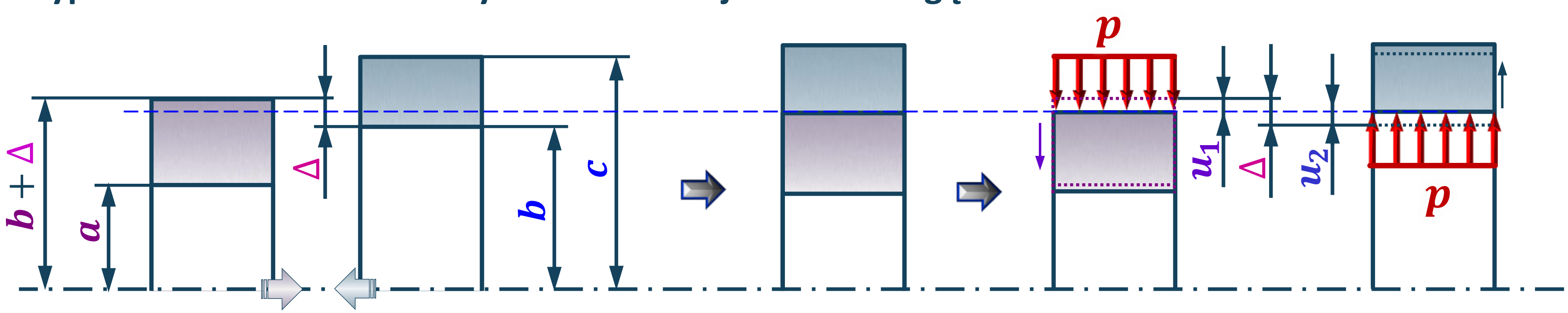
$$p < \frac{k_r}{\sqrt{3}} \approx 0.58 k_r$$

b) Hipoteza τ_{max}:

Wytężenie takie samo jak dla rur przelotowych (por. p. 8.3.2 b), gdyż wg hipotezy C-T-G nie zależy od naprężeń $\sigma_2 = \sigma_z$.

8.4. Połączenia wciskowe

Przypadek dwóch rur nałożonych z wciskiem jedna na drugą:



Ogólna postać rozwiązania równania Lamégo na przemieszczenie warstwy na promieniu r (por. p. 8.2):

$$u = \frac{1}{E(b^2 - a^2)}\left((1-\nu)(a^2 p_a - b^2 p_b)r + (1+\nu)a^2 b^2 (p_a - p_b)\frac{1}{r}\right)$$

gdzie: a – promień wewnętrzny, b – promień zewnętrzny, p_a – ciśnienie wewnętrzne, p_a – ciśnienie zewnętrzne.

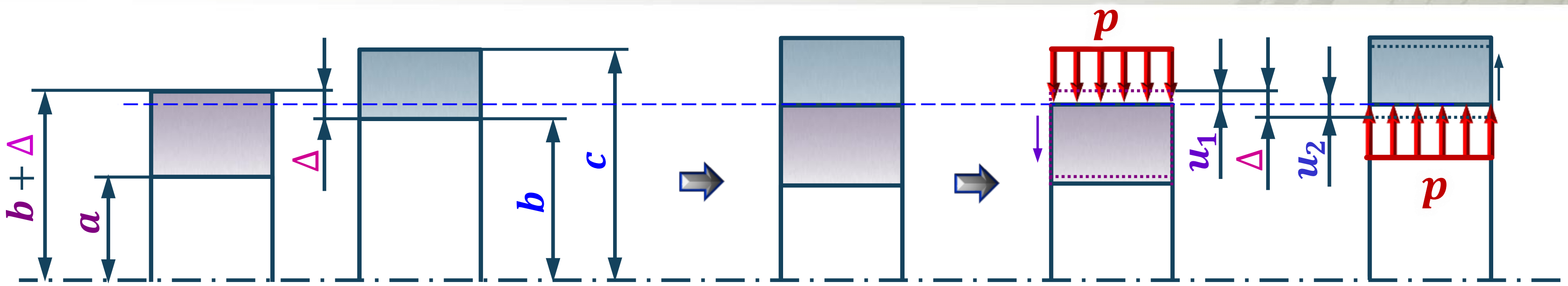
1) Dla rury wewnętrznej – wymiary: a i b; $p_a = 0$; $p_b = p$; $r = b$ – stąd: $u_1 = -\frac{bp}{E_1}\left(\frac{a^2 - b^2}{b^2 - a^2} - \nu_1\right)$

2) Dla rury zewnętrznej – wymiary: b i c; $p_a = p$; $p_b = 0$; $r = c$ – stąd: $u_2 = \frac{bp}{E_2}\left(\frac{b^2 + c^2}{c^2 - b^2} + \nu_2\right)$

3) Warunek równowagi odkształceń: $|u_1| + |u_2| = \Delta$

$$\boxed{\frac{bp}{E_1}\left(\frac{a^2 - b^2}{b^2 - a^2} - \nu_1\right) + \frac{bp}{E_2}\left(\frac{b^2 + c^2}{c^2 - b^2} + \nu_2\right) = \Delta}$$

8.4. Połączenia wciskowe

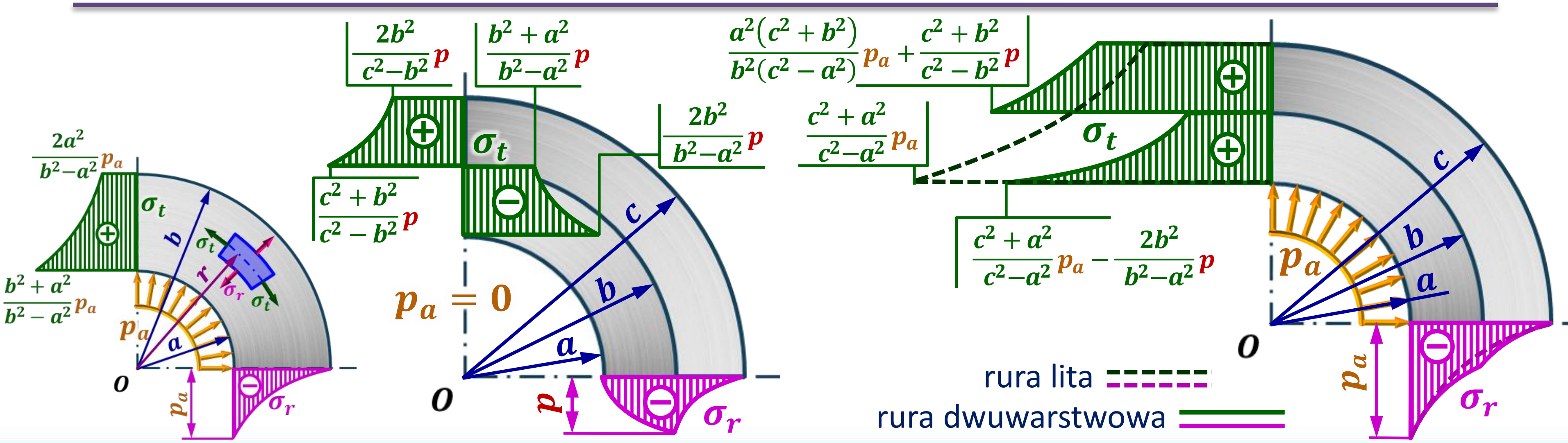


$$\frac{bp}{E_1}\left(\frac{a^2-b^2}{b^2-a^2}-\nu_1\right)+\frac{bp}{E_2}\left(\frac{b^2+c^2}{c^2-b^2}+\nu_2\right)=\Delta$$

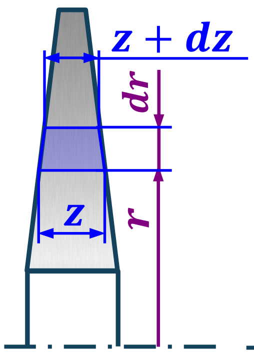
$$p=\frac{\Delta}{\frac{b}{E_1}\left(\frac{a^2-b^2}{b^2-a^2}-\nu_1\right)+\frac{b}{E_2}\left(\frac{b^2+c^2}{c^2-b^2}+\nu_2\right)}$$

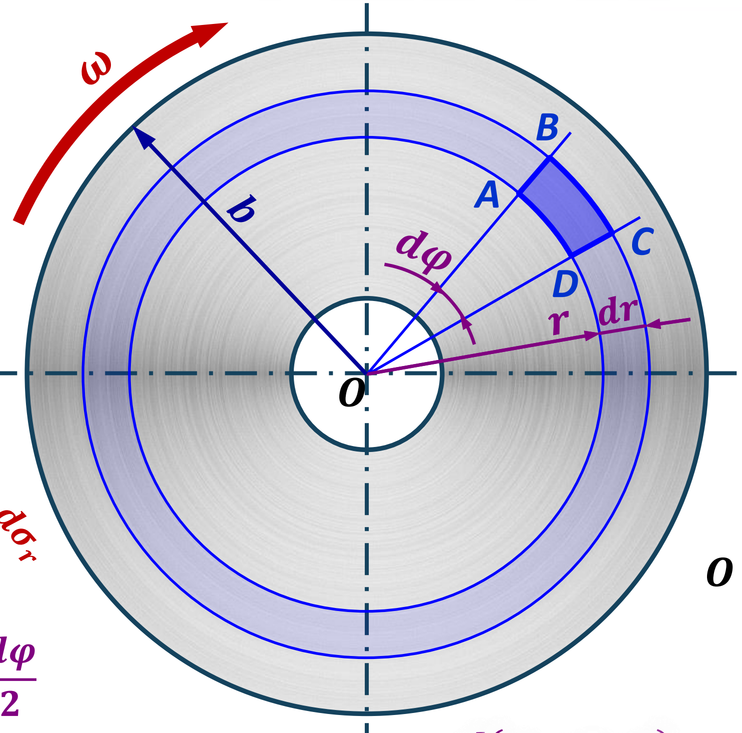
Gdy obydwie rury wykonane są z tego samego materiału:
$(E_1 = E_2 = E;\ \nu_1 = \nu_2 = \nu)$

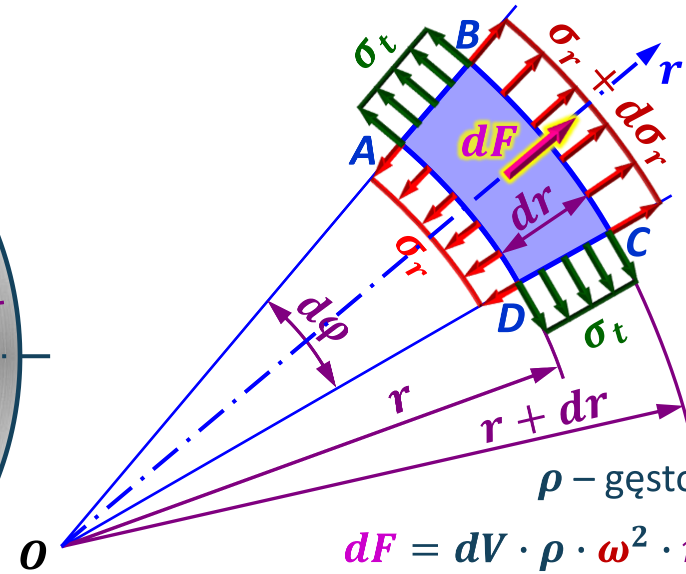
$$p=\frac{E\Delta}{b}\frac{\left(b^2-a^2\right)\left(c^2-b^2\right)}{2b^2\left(c^2-a^2\right)}$$

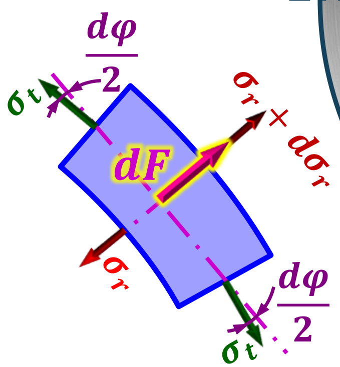


8.5. Krążki wirujące









ρ – gęstość

$$\left.\begin{aligned} dF &= dV\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r \\ dV &= r\cdot d\varphi\cdot dr\cdot z \end{aligned}\right\}$$

$$dF = \rho\cdot r^2\omega^2\cdot z\cdot dr\cdot d\varphi$$

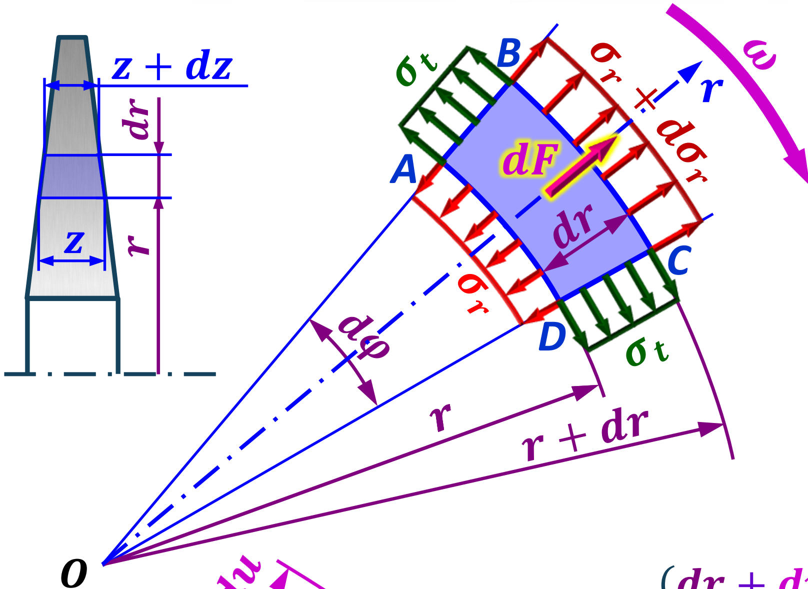
$$\sum P_{ir} = 0 \Rightarrow \boxed{\overbrace{(\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr)(z+dz)\cancel{d\varphi} - \sigma_r r z\cancel{d\varphi}}^{d(\sigma_r\cdot r\cdot z)}} - \cancel{2}\sigma_t z dr \overbrace{\boxed{\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right)}}^{\frac{\cancel{d\varphi}}{\cancel{2}}\approx} + \rho r^2\omega^2 z dr\cancel{d\varphi} = 0$$

$$d(\sigma_r\cdot r\cdot z) - \sigma_t z dr + \rho r^2\omega^2 z dr = 0 \Big/ : zdr \Rightarrow \frac{1}{z}\frac{d(\sigma_r\cdot r\cdot z)}{dr} - \sigma_t + \rho r^2\omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z}\left(\frac{dr}{dr}\sigma_r z + \frac{d(\sigma_r z)}{dr} r\right) - \sigma_t + \rho r^2\omega^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{r}{z}\frac{d(\sigma_r\cdot z)}{dr} + \sigma_r - \sigma_t + \rho r^2\omega^2 = 0}$$

→ równanie zawiera dwie niewiadome (σ_r i σ_t) → problem statycznie niewyznaczalny.

8.5. Krążki wirujące



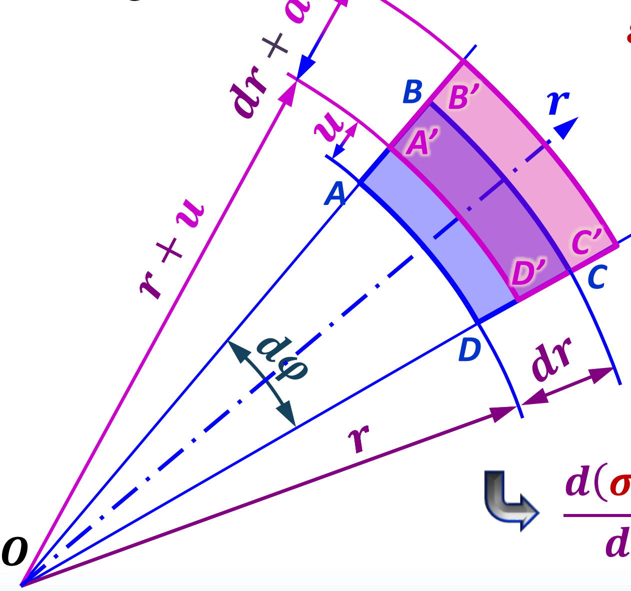
1) Równanie równowagi naprężeń:

$$\boxed{\frac{r}{z}\frac{d(\sigma_r \cdot z)}{dr} + \sigma_r - \sigma_t + \rho r^2 \omega^2 = 0} \qquad (1)$$

2) Z prawa Hooke'a:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t) \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r) \end{aligned}\right] \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) \qquad (2a) \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r) \qquad (2b) \end{aligned}\right.$$

3) Równania równowagi odkształceń:



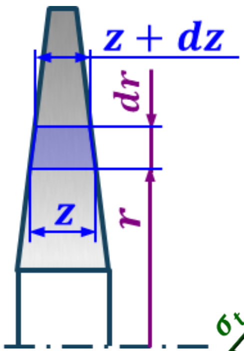
$$\varepsilon_r = \frac{(dr + du) - dr}{dr} = \frac{du}{dr} \quad (3a) \qquad \varepsilon_t = \frac{(r+u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r} \quad (3b)$$

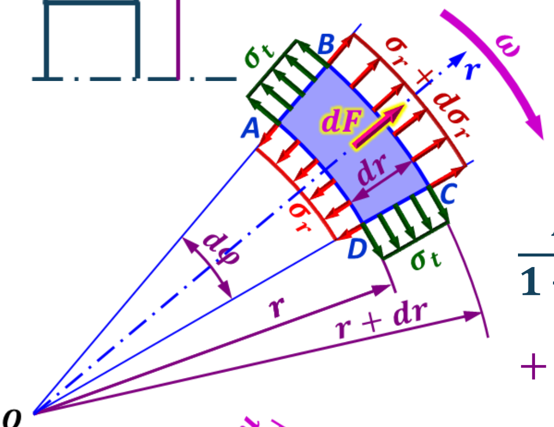
$$\left.\begin{matrix} (2a) \\ (3a) \\ (3b) \end{matrix}\right\} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) \qquad \left.\begin{matrix} (2a) \\ (3a) \\ (3b) \end{matrix}\right\} \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right)$$

$$\frac{d(\sigma_r z)}{dr} = \frac{d\sigma_r}{dr}z + \frac{dz}{dr}\sigma_r$$

$$\frac{d(\sigma_r z)}{dr} = \frac{E}{1-\nu^2}z\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{du}{dr} - \nu\frac{u}{r^2}\right) + \frac{dz}{dr}\sigma_r + \frac{E}{1-\nu^2}\frac{dz}{dr}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)$$

8.5. Krążki wirujące



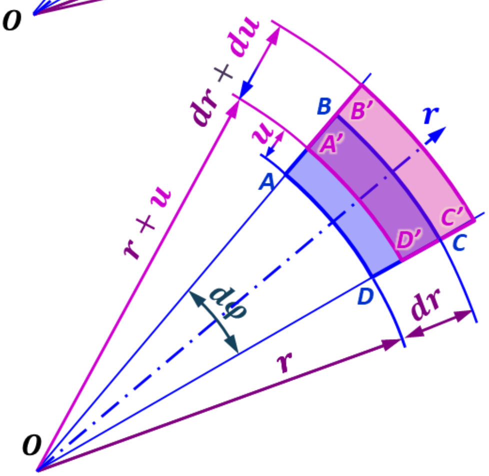


$$\frac{d(\sigma_r z)}{dr} = \frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{du}{dr} - \nu\frac{u}{r^2}\right) + \frac{dz}{dr}\sigma_r + \frac{E}{1-\nu^2}\frac{dz}{dr}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) \qquad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right)$$

$$\frac{r}{z}\boxed{\frac{d(\sigma_r \cdot z)}{dr}} + \boxed{\sigma_r} - \boxed{\sigma_t} + \rho r^2 \omega^2 = 0$$

$$\frac{Er}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{du}{dr} - \nu\frac{u}{r^2}\right) + \frac{r}{z}\frac{dz}{dr}\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) + \frac{Er}{z(1-\nu^2)}\frac{dz}{dr}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)$$
$$+ \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) - \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) + \rho r^2 \omega^2 = 0$$



po uproszczeniu:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{z}\frac{dz}{dr}\right)\frac{du}{dr} + \frac{1}{r}\left(\frac{\nu}{z}\frac{dz}{dr} - \frac{1}{r}\right)u = Ar$$

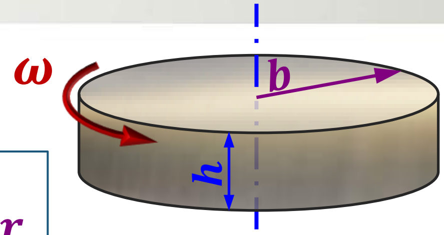
gdzie:

$$A = \frac{\nu^2 - 1}{E}\rho\omega^2$$

Zależność na odkształcenie wirującego krążka, w postaci równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu. Rozwiązanie tego równania w postaci skończonej udaje się uzyskać tylko dla pewnych funkcji $z = z(r)$.

8.5. Krążki wirujące

8.5.1. Krążek bez otworu o stałej grubości:



ρ – gęstość materiału krążka

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{z}\frac{dz}{dr}\right)\frac{du}{dr}+\frac{1}{r}\left(\frac{\nu}{z}\frac{dz}{dr}-\frac{1}{r}\right)u=Ar$$

$$A=\frac{\nu^2-1}{E}\rho\omega^2$$

$z=h=const.$

$$\frac{dz}{dr}=0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=Ar \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)\right)=Ar$$

Całkując kolejno po r:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)=A\frac{r^2}{2}+C_1 \Rightarrow \frac{d}{dr}(ur)=A\frac{r^3}{2}+C_1r$$

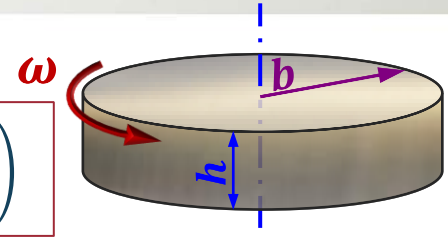
$$ur=A\frac{r^4}{8}+C_1\frac{r^2}{2}+C_2 \Rightarrow \boxed{u=A\frac{r^3}{8}+C_1\frac{r}{2}+\frac{C_2}{r}}$$

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}\right) \Rightarrow \sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left(A\frac{(3+\nu)r^2}{8}+\frac{1+\nu}{2}C_1-\frac{1-\nu}{r^2}C_2\right)$$

$$\sigma_t=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r}+\nu\frac{du}{dr}\right) \Rightarrow \sigma_t=\frac{E}{1-\nu^2}\left(A\frac{(1+3\nu)r^2}{8}+\frac{1+\nu}{2}C_1+\frac{1-\nu}{r^2}C_2\right)$$

8.5. Krążki wirujące

8.5.1. Krążek bez otworu o stałej grubości:



ρ – gęstość materiału krążka

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(A\frac{(3+\nu)r^2}{8} + \frac{1+\nu}{2}C_1 - \frac{1-\nu}{r^2}C_2\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(A\frac{(1+3\nu)r^2}{8} + \frac{1+\nu}{2}C_1 + \frac{1-\nu}{r^2}C_2\right)$$

$$u = A\frac{r^3}{8} + C_1\frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \qquad A = \frac{\nu^2-1}{E}\rho\omega^2$$

Warunki brzegowe:

1° $u(r=0)=0$ ⇒ $0 = A\frac{0^3}{8} + C_1\frac{0}{2} + \frac{C_2}{r}$ ⇒ $C_2 = 0$

$$C_1 = \frac{(3+\nu)}{4(1+\nu)}\frac{1-\nu^2}{E}b^2\rho\omega^2$$

2° $\sigma_r(r=b)=0$ ⇒ $A\frac{(3+\nu)b^2}{8} + \frac{1+\nu}{2}C_1 = 0$ ⇒ $C_1 = -\frac{(3+\nu)Ab^2}{4(1+\nu)}$

Uwzględniając wartość A oraz stałe C_1 i C_2:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2-r^2)$$

$$\sigma_t = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right)$$

$$u = \frac{1-\nu^2}{8E}\rho r\omega^2\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}b^2 - r^2\right)$$

Na środku krążka ($r=0$), naprężenia wynoszą:

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_O = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2$$

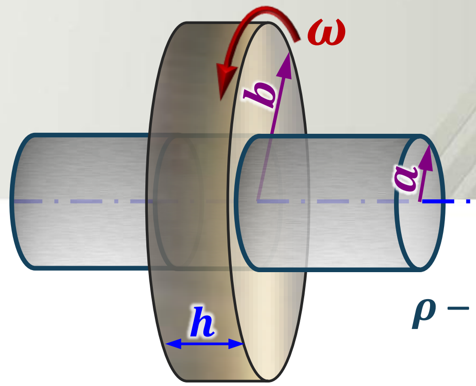
Można zapisać:

$$\sigma_r = \sigma_O\left(1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2\right)$$

$$\sigma_r = \sigma_O\left(1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}\left(\frac{r}{b}\right)^2\right)$$

AGH

8.5. Krążki wirujące



ρ – gęstość materiału krążka

8.5.1. Krążek z otworem o stałej grubości:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(A\frac{(3+\nu)r^2}{8} + \frac{1+\nu}{2}C_1 - \frac{1-\nu}{r^2}C_2\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(A\frac{(1+3\nu)r^2}{8} + \frac{1+\nu}{2}C_1 + \frac{1-\nu}{r^2}C_2\right)$$

$$u = A\frac{r^3}{8} + C_1\frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

$$A = \frac{\nu^2-1}{E}\rho\omega^2$$

Warunki brzegowe:

1° $\sigma_r(r=a) = 0$ ⇨ $\frac{1+\nu}{2}C_1 - \frac{1-\nu}{a^2}C_2 = -\frac{(3+\nu)Aa^2}{8}$

2° $\sigma_r(r=b) = 0$ ⇨ $\frac{1+\nu}{2}C_1 - \frac{1-\nu}{b^2}C_2 = -\frac{(3+\nu)Ab^2}{8}$

⇨ $$C_1 = -\frac{(3+\nu)}{4(1+\nu)}A(a^2+b^2)$$

⇨ $$C_2 = -\frac{(3+\nu)}{8(1-\nu)}Aa^2b^2$$

Uwzględniając wartość A oraz stałe C_1 i C_2:

$$\sigma_r = \sigma_0\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{r}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)$$

$$\sigma_r = \sigma_0\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)$$

$$u = \frac{\sigma_0}{Eb^2}\left((1-\nu)(a^2+b^2)r + (1+\nu)\frac{a^2b^2}{r} - \frac{1-\nu^2}{3+\nu}r^3\right)$$

gdzie:

$$\sigma_0 = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2b^2$$